Jolien De Brauwer en Wim Fias [1]

De tafels van vermenigvuldiging en deling: een vast koppel?

Kinderen met dyscalculie hebben vaak hardnekkige problemen met het snel oproepen van het antwoord op bijvoorbeeld 4 x 6. Ook heel wat kinderen met dyslexie falen op temporekenen. Daarnaast hebben kinderen met ADHD en minder verstandige kinderen het vaak moeilijk om de tafels in te studeren. Het onderzoek naar de ontwikkeling van rekenvaardigheden is dus van groot belang. Vanuit dit onderzoek weten we dat, na voldoende oefening, de oplossing van eenvoudige vermenigvuldigingen (bv. 4 x 6) meestal 'gewoon' in ons hoofd opkomt, zonder dat we echt hoeven te rekenen. De zogenaamde rekenfeiten zitten opgeslagen in het langetermijngeheugen. Dit heeft als voordeel dat we snel en met weinig moeite een oplossing klaar hebben, maar ook dat er meer 'cognitieve ruimte' is om andere taken tot een goed einde te brengen. In deze studie beschrijven we de ontwikkelingstrajecten van vermenigvuldiging en deling (de 'tafels') om gelijkenissen en verschillen tussen beide operaties in kaart te brengen. We observeerden opvallende parallellen tussen beide operaties en besluiten dat vermenigvuldiging en deling interagerende en wederzijds afhankelijke vaardigheden zijn.

Inleiding

Rekenen = concepten + procedures + feiten

Rekenen is een vaardigheid die we vaak gebruiken, niet alleen in een schoolse context, maar ook in het dagelijks leven. Het belang van deze vaardigheid valt vooral op wanneer het rekenen *niet* vlot verloopt. Dit is de realiteit voor kinderen met dyscalculie, naar schatting zo'n drie tot acht procent van de lagereschoolkinderen in België (Desoete, Roeyers & De Clercq, 2004). Ook na een hersenletsel kunnen ernstige rekenproblemen ontstaan (Dehaene, 1997; Butterworth, 1999;

[1] Dr. Jolien De Brauwer en prof. dr. Wim Fias zijn beiden verbonden aan de Vakgroep Experimentele Psychologie van de Universiteit Gent. Contactadres: jolien.debrauwer@ugent.be

Delazer, Girelli, Granà & Domahs, 2003). Precies omdat rekenen voor de meeste mensen zo vanzelfsprekend is, staan we er niet bij stil dat goed kunnen rekenen heel wat kennis en vaardigheden vereist. Om de vier rekenkundige operaties (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) te kunnen begrijpen en uitvoeren, hebben we domeinspecifieke conceptuele kennis nodig. Dit houdt in dat je weet WAT te doen (bv. 'optellen is bij elkaar voegen, vermeerderen'). We onderscheiden dit van de (domeinspecifieke) procedurele kennis en procedurele vaardigheden van deze operaties, met andere woorden weten HOE je de operaties moet uitvoeren (bv. 4 + 3 = 4 + 1 + 1 + 1). Procedurele kennis kunnen we dus definiëren als de vaardigheid om de opeenvolgende stappen van rekenkundige procedures correct uit te voeren. Naarmate we meer ervaring opdoen, voeren we niet telkens opnieuw de procedure uit, maar ontstaan er geleidelijk aan rechtstreekse geheugensporen tussen een (eenvoudige) opgave en een antwoord (bv. 4 + 3 = 7). Dankzij de aanwezigheid van feitenkennis in het langetermijngeheugen verloopt het rekenen dan geautomatiseerd. We bezitten dus de vaardigheid om oplossingen van eenvoudige rekenopgaven (met ééncijferige getallen, bv. 3 + 4, 6 x 7, …) rechtstreeks uit het geheugen op te halen.

In de onderzoeksliteratuur over hoofdrekenen worden feitenkennis en procedurele vaardigheden als onafhankelijk van elkaar beschouwd. Heel wat evidentie toont aan dat dit een valide aanname is. Deze evidentie komt vooral uit neuropsychologische hoek. Er werd immers een dubbele dissociatie beschreven bij patiënten met hersenletsels. Enerzijds observeerden zowel Sokol, McCloskey, Cohen en Aliminosa (1991) als Whetstone (1998) een patiënt die géén geautomatiseerde rekenvaardigheden (feitenkennis) bezat, maar de procedures wél correct kon uitvoeren. Anderzijds beschreven McNeil en Burgess (2002) een patiënt met het omgekeerde patroon: intacte feitenkennis, maar een slecht gebruik van procedures. Deze dubbele dissociatie toont ontegensprekelijk aan dat procedurele kennis en feitenkennis onafhankelijk van elkaar bestaan. Het is bovendien zo dat getallenkennis onafhankelijk is van andere vormen van kennis. Zo werd er een patiënte beschreven die bijvoorbeeld niet meer in staat was om te beschrijven hoe een olifant eruit ziet, maar wel nog in staat was om te zeggen hoeveel 7 x 8 is (Zamarian, Karner, Benke, Donnemiller & Delazer, 2006). Het omgekeerde patroon, met name een specifieke uitval op rekenfeiten, werd ook al beschreven (Kaufmann, Lochy, Drexler & Semenza, 2004; Lochy, Domahs & Delazer, 2004). Kennis van rekenfeiten kan dus als een relatief onafhankelijk domein worden beschouwd.

Al in de jaren 1970 en '80 werd onderzoek verricht naar de kennis van eenvoudige rekenfeiten en hoe deze in het geheugen worden opgeslagen. Tot op heden blijft dit een belangrijk onderzoeksdomein in de cognitieve psychologie, zoals blijkt uit de vele publicaties die over dit onderwerp verschijnen (voor een recent overzicht verwijzen we naar Domahs & Delazer, 2005 en Campbell, 2005). In de lagere school wordt heel wat tijd en moeite geïnvesteerd in het aanleren van deze rekenfeiten. Het voordeel van het bezitten van deze feitenkennis ligt voor de hand: het oproepen van oplossingen uit het geheugen gaat sneller, makkelijker en vraagt minder capaciteit van het werkgeheugen dan het uitvoeren van een procedure.

Kinderen met dyscalculie hebben meestal moeite met het verwerven van deze feitenkennis (zie o.a. Geary, Hamson & Hoard, 2000; Jordan, Hanich & Kaplan, 2003; Mussolin & Noël, 2008). Een minder volledige of minder geautomatiseerde geheugenrepresentatie van de basisrekenfeiten zal ertoe leiden dat er minder werkgeheugencapaciteit ter beschikking staat voor bijvoorbeeld het aanleren van een nieuwe rekenprocedure of het lezen van de opgave van een vraagstuk.

Optellen en vermenigvuldigen: vooral het langetermijngeheugen

Een goede geheugenrepresentatie van rekenfeiten is dus een voordeel, maar is het oproepen uit het geheugen daadwerkelijk de dominante strategie? In de cognitieve psychologie werd dit op twee manieren onderzocht.

Enerzijds werd de methode van zelfrapportering gebruikt. Dit houdt in dat de proefpersonen na elke opgave wordt gevraagd hoe ze de opgave hebben opgelost: door middel van oproepen uit het geheugen ('ik weet het gewoon, de oplossing kwam op in mijn hoofd') of door middel van een procedure (bv. tellen). Heel wat onderzoek toonde aan dat volwassenen de oplossing van eenvoudige rekenopgaven inderdaad meestal uit het geheugen oproepen in plaats van procedures te gebruiken. Dit geldt vooral bij eenvoudige vermenigvuldigingen (de 'tafels'). Onder andere Campbell en Xue (2001) onderzochten dit. Hun (volwassen) proefpersonen rapporteerden in 97 procent van de gevallen dat ze de oplossing uit hun geheugen hadden opgeroepen. Zelfrapportering is echter niet de enige manier om dit te onderzoeken. Bovendien variëren percentages gebruik van het oproepen uit het geheugen nogal tussen operaties (voor eenvoudige deling gaat dit van 45 tot 90 procent; bv. LeFèvre & Morris, 1999; Campbell & Timm, 2000) en werd de validiteit van deze methode in vraag gesteld (Kirk & Ashcraft, 2001). De instructies die men geeft kunnen de rapportering van de proefpersonen immers beïnvloeden en bijvoorbeeld leiden tot een frequenter gebruik van procedures in plaats van het oproepen uit het geheugen (Kirk & Ashcraft, 2001).

Toch is het een algemeen aanvaard gegeven dat het oproepen van oplossingen uit het geheugen de meest frequente strategie is voor optelling en vermenigvuldiging, omdat ook andere onderzoeksmethoden tot deze conclusie leiden. Een alternatieve manier om dit te onderzoeken, is de 'getalsmatchingtaak'. Deze taak verloopt als volgt: twee getallen worden heel kort aangeboden op het scherm (bv. 3 en 7), deze worden onmiddellijk gevolgd door een derde getal (bv. 21). De taak van de proefpersoon bestaat erin te beslissen of het derde getal (21) al dan niet voorkomt bij de twee eerste getallen. Wanneer er een rekenkundige relatie bestaat tussen de drie getallen, zoals in het voorbeeld, dan observeert men tragere responsen (enkele tientallen milliseconden, doch significant) dan wanneer er geen rekenkundige relatie bestaat. Dit wordt een interferentie-effect genoemd. Het bewijst dat getallen automatisch leiden tot de activatie van hun product of som in het geheugen. Dit werd al geobserveerd voor optellingen (LeFèvre, Bisanz & Mrkonjic, 1988) en vermenigvuldigingen (Thibodeau, LeFèvre & Bisanz, 1996). Sterker nog, Galfano, Rusconi en Umiltà (2003) toonden aan dat niet alleen het betreffende product in een getalsmatchingtaak automatisch wordt geactiveerd, maar ook verwante producten. Bij het zien van bijvoorbeeld 7 en 3 wordt dus niet alleen 21 geactiveerd, maar ook 28 (de oplossing van 7 x 4). Deze bevinding illustreert hoe het geheugennetwerk is opgebouwd en hoe activatie zich in dit netwerk verspreidt.

Er werden hierover al heel wat theorieën voorgesteld en tot op vandaag is er nog veel discussie over de details van de organisatie van rekenfeiten in het geheugen. De meeste theorieën (bv. Campbell, 1995; Verguts & Fias, 2005) zijn het wel eens over het bestaan van een netwerkstructuur waarbij er verbindingen zijn tussen de getallen uit de opgave en de (juiste) oplossing, maar ook tussen de verschillende opgaven en oplossingen onderling. Met andere woorden, bij het zien van 7 x 3 wordt '21' geactiveerd, maar ook de 'verwante' opgaven (bv. 7 x 4 = 28). De essentie van een goed model is uiteraard dat het in staat is om verklaringen te geven voor een aantal robuuste observaties. De theorieën verschillen in de manier waarop ze deze effecten verklaren. We gaan hier nu niet dieper op in, omdat de verschillen in het bestek van dit artikel niet van wezenlijk belang zijn (maar zie o.a. Verguts & Fias, 2005). We beperken ons dus tot een beschrijving van de robuust geobserveerde effecten.

Een eerste effect is het effect van probleemgrootte. Dit is de observatie dat opgaven met grote getallen (bv. 7 x 8) trager en met meer fouten worden opgelost dan opgaven met kleine getallen (bv. 3 x 4) (zie o.a. Stazyk, Ashcraft & Hamann, 1982). Wat we eveneens zien is dat opgaven met het getal 5 sneller en met minder fouten worden opgelost dan opgaven zonder het getal 5 (het zogenaamde 'vijfeffect', zie o.a. Siegler, 1988) en dat opgaven met twee gelijke cijfers (4 x 4) sneller en met minder fouten worden opgelost dan opgaven met twee verschillende cijfers (4 x 6): dit noemen we het knoopeffect (zie o.a. Campbell & Gunter, 2002). Verder wordt er een interactie-effect geobserveerd tussen het knoopeffect en het effect van probleemgrootte, in die zin dat opgaven met twee gelijke cijfers (zogenaamde 'knopen') een kleiner effect van probleemgrootte vertonen dan opgaven met twee verschillende cijfers (niet-knopen) (Campbell & Gunter, 2002). Ook het interferentie-effect is een robuuste observatie (zie boven). Deze observaties suggereren dat rekenfeiten niet zomaar 'mechanische' verbale associaties zijn, maar dat er een numerieke organisatie van rekenfeiten in ons geheugen aan de basis ligt. Dit is dan ook het uitgangspunt van de meeste theorieën.

En deling?

Een andere theoretisch relevante vraag betreft de relatie tussen de vier rekenkundige operaties. Aangezien optelling en aftrekking enerzijds en vermenigvuldiging en deling anderzijds complementaire operaties zijn, is het in principe mogelijk om op basis van conceptuele, procedurele en/of feitenkennis van de ene operatie tot een oplossing te komen voor de andere, complementaire operatie. Een andere mogelijkheid is echter dat er een onafhankelijk geheugennetwerk bestaat per operatie. Nagaan hoe de conceptuele links tussen de operaties worden gereflecteerd in de manier waarop feitenkennis in ons geheugen wordt opgeslagen, is naar onze mening dan ook een belangrijk onderzoeksthema voor het begrijpen van het hoe en waarom van onze rekenkundige kennis. Aangezien deling bijvoorbeeld de inverse operatie is van vermenigvuldiging en aangezien er heel wat evidentie is voor het feit dat vermenigvuldigingen in het geheugen opgeslagen zitten, zou men intuïtief denken dat het voldoende is om te weten dat 7 x 3 = 21 om ook te weten dat 21 : 3 = 7.

Vooraleer over te gaan tot de beschrijving van een longitudinale studie bij lagereschoolkinderen rond dit thema, gaan we dieper in op de bestaande literatuur hieromtrent. Ook hier zijn beschrijvingen van patiënten met hersenletsels zeer informatief. Er zijn patiënten beschreven die wel nog konden vermenigvuldigen, maar niet meer konden delen (Cipolotti & deLacy Costello, 1995; Delazer & Benke, 1997; Dehaene & Cohen, 1997; Delazer, Karner, Zamarian, Donnemiller & Benke, 2006), maar er zijn eveneens patiënten beschreven die voor geen van beide operaties in staat waren om oplossingen uit het geheugen op te halen (zie onder andere Delazer, Semenza & Denes, 1994; Sandrini, Miozzo, Cotelli & Cappa, 2003; Delazer e.a., 2004). Het patroon waarbij deling verstoord is en vermenigvuldiging intact, kan echter ook worden geïnterpreteerd in termen van toegangsproblemen, in de zin dat beide operaties in één netwerk worden opgeslagen, maar dat de *toegang* voor delingen moeilijker is (bv. door minder oefening). De moeilijkere toegang tot het geheugennetwerk voor delingen zal ertoe leiden dat delingen dan eerst uitvallen bij een hersenletsel. Het patroon met intacte deling en verstoorde vermenigvuldiging werd (nog) niet beschreven. Het observeren van deze dubbele dissociatie zou impliceren dat delings- en vermenigvuldigingsfeiten op zijn minst bij die specifieke patiënt onafhankelijk van elkaar worden opgeslagen. Zonder de observatie van een dubbele dissociatie kunnen we echter (nog) geen conclusies trekken met betrekking tot de cognitieve relatie tussen vermenigvuldiging en deling, althans niet uit patiëntenstudies.

Een beschrijving van de ontwikkelingstrajecten van beide operaties zou ons meer inzicht kunnen verlenen, aangezien op die manier gelijkenissen en verschillen tussen beide operaties doorheen de ontwikkeling aan het licht zullen komen. Er is echter nog maar weinig onderzoek verricht over hoe kinderen eenvoudige delingen oplossen. Daarom hebben we een longitudinaal onderzoek opgezet bij normaal ontwikkelende kinderen (De Brauwer & Fias, 2009), dat in dit artikel kort zal worden beschreven.

Methode

Om de ontwikkelingstrajecten van zowel vermenigvuldiging als deling te beschrijven werd de performantie gemeten van kinderen uit het derde leerjaar op vermenigvuldiging, deling en de getalsmatchingtaak, en dit twee keer per schooljaar en voor twee opeenvolgende schooljaren. Het vergelijken van de performantie op vermenigvuldiging en deling kan ons meer leren over de cognitieve relatie tussen beide operaties. Hiervoor focusten we op de vier effecten die robuust worden geobserveerd wanneer volwassenen eenvoudige vermenigvuldigingen oplossen, namelijk het effect van probleemgrootte, het vijfeffect, het knoopeffect en het interferentie-effect (zie boven).

Het observeren van gelijkaardige ontwikkelingstrajecten voor deze effecten in beide operaties zou er immers op wijzen dat gelijkaardige principes aan de basis liggen van de geheugenrepresentatie ervan. Eerder onderzoek toonde aan dat het oproepen uit het geheugen al heel vroeg in de ontwikkeling de dominante strategie wordt om eenvoudige vermenigvuldigingen op te lossen (Cooney, Swanson & Ladd, 1988; Lemaire & Siegler, 1995). De effecten van probleemgrootte, vijf- en knoopstatus werden ook al geobserveerd bij kinderen (Campbell & Graham, 1985; De Brauwer, Verguts & Fias, 2006), net als interferentie-effecten in een productietaak (Koshmider & Ashcraft, 1991). Over deling weten we echter nog heel weinig op het ontwikkelingsvlak, behalve dat er een effect van probleemgrootte wordt geobserveerd vanaf het vierde leerjaar (Robinson e.a., 2006).

Deelnemers

Dezelfde kinderen (n = 27) namen deel aan vier meetmomenten: begin en eind derde leerjaar en begin en eind vierde leerjaar. Op het eerste meetmoment was de gemiddelde leeftijd van de kinderen 8 jaar en 3 maanden (range van 7 jaar 10 maanden tot 9 jaar 3 maanden). Geen van hen had een leerstoornis (er bestond ook geen vermoeden van een leerstoornis), zoals gerapporteerd door de klasleerkracht.

Taken en stimuli

Op elk meetmoment werden twee verificatietaken (d.i. 3 x 8 = 26, juist of fout?) afgenomen: vermenigvuldiging en deling. De stimuli voor beide verificatietaken waren de 64 'standaard' vermenigvuldigingsproblemen (van 2 x 2 t.e.m. 9 x 9) en hun corresponderende delingen (van 4 : 2 t.e.m. 81: 9). Er werd ook telkens een getalsmatchingtaak afgenomen. Bij deze taak ziet men eerst twee getallen (" 8 2 ") en dan een derde targetgetal ("16"). De taak bestaat erin te beslissen of het targetgetal wel of niet voorkwam in de eerst gepresenteerde getallen (de cue). Er moet dus een ja/nee-respons worden gegeven. We vergelijken hier de performantie op twee trialtypes, nl. de trials waarbij er een rekenkundige relatie is tussen de drie getallen en de trials waarbij dat niet het geval is. Dit zijn beide trials waarbij een nee-respons moet worden gegeven. Bij de helft van de kritische stimuli (met een rekenkundige relatie tussen de getallen) was het targetgetal het product van de eerste twee getallen (bv. 8 2 en 16), bij de andere helft was het targetgetal het quotiënt van de eerste twee getallen (bv. 16 2 en 8).

Procedure

Alle afnames gebeurden op school, tijdens de schooluren, in oktober 2004, maart 2005, oktober 2005 en maart 2006. De afnames gebeurden per twee.

Resultaten

We analyseerden alleen reactietijden (RT). Foutpercentages waren te laag om zinvolle uitspraken te kunnen doen. Voor zowel vermenigvuldiging als deling werd bij twaalf procent van de opgaven een fout antwoord gegeven in het begin van het derde leerjaar. Vanaf het einde van het derde leerjaar zakte dit tot zes procent fouten. Dit bleef verder stabiel.

Effect van probleemgrootte

Er werd trager gereageerd op grote problemen (beide getallen groter dan 5, bv. 6 x 7) dan op kleine problemen (beide getallen kleiner dan 5, bv. 3 x 4). Dit effect van probleemgrootte werd geobserveerd in beide operaties en op elk meetmoment. Het verschil in reactietijd tussen grote en kleine problemen bleek bovendien vrij stabiel doorheen de vier meetmomenten. Alleen voor deling observeerden we dat het effect van probleemgrootte bij kinderen met een accuraatheid boven het groepsgemiddelde significant kleiner werd doorheen de vier meetmomenten. Voor de kinderen met een accuraatheid onder het groepsgemiddelde bleef het effect van probleemgrootte even groot doorheen de vier meetmomenten.

Vijfeffect

Problemen waarin het getal 5 voorkomt, werden sneller opgelost dan problemen zonder het getal 5. Dit vijfeffect werd geobserveerd in beide operaties en op elk meetmoment. Het verschil in reactietijd tussen problemen met het getal 5 en problemen zonder het getal 5 bleek stabiel te zijn over de vier meetmomenten en dit voor beide operaties.

Knoopeffect

Problemen met twee identieke getallen (bv. 6 x 6) en de corresponderende delingen (bv. 36 : 6) werden sneller opgelost dan problemen met twee verschillende getallen (bv. 7 x 6 en 42 : 6). Dit effect was aanwezig voor beide operaties, behalve voor deling aan het begin van het derde leerjaar. Op het einde van het derde leerjaar wordt dit effect wel significant voor deling en het blijft vanaf dan ook even groot. Bovendien was het knoopeffect sterker voor vermenigvuldiging dan voor deling. Bij vermenigvuldigingsknopen (bv. 6 x 6) verloopt het coderen van de visuele informatie sneller omdat er twee identieke getallen moeten worden verwerkt. Bij delingsknopen zijn dat twee verschillende getallen (bv. 36 : 6). Onze bevindingen tonen aan dat dit voordeel ook bij kinderen een rol speelt. Bovendien werd er, net zoals bij volwassenen, een interactie geobserveerd tussen probleemgrootte en knoop/geen knoop-status, in de zin dat het effect van probleemgrootte veel kleiner is voor 'knopen' (109 ms) dan voor 'niet-knopen' (532 ms). Met andere woorden, het verschil in reactietijd tussen 2 x 2 en 9 x 9 is veel kleiner dan tussen 2 x 3 en 9 x 8. Deze interactie leert ons dat er wat betreft knoopproblemen meer aan de hand is dan enkel een visueel coderingsvoordeel. Verschillen in de manier waarop knoop- en andere problemen worden opgeslagen in het geheugen spelen ook mee, en dit al vroeg in de ontwikkeling. Deze interactie bleek niet te verschillen tussen beide operaties. Bovendien bleef ze stabiel doorheen de vier meetmomenten.

Interferentie-effect

Het interferentie-effect in de getalsmatchingtaak werd enkel geobserveerd voor vermenigvuldiging, niet voor deling. Voor vermenigvuldiging bleef dit effect even groot doorheen de verschillende meetmomenten.

Discussie

In deze studie onderzochten we zowel vermenigvuldiging als deling, kort nadat de kinderen de tafels aangeleerd kregen tot op het einde van het vierde leerjaar. We bekeken het ontstaan en de evolutie van een aantal effecten die bij volwassenen altijd worden geobserveerd wanneer ze eenvoudige rekenopgaven oplossen: het effect van probleemgrootte, het vijf-effect en het knoopeffect. We bekeken eveneens het voorkomen en de evolutie van het interferentie-effect.

Wanneer ontstaan de effecten?

Alle effecten die normaal bij volwassenen worden geobserveerd, werden ook bij de kinderen geobserveerd, en dit vrij snel nadat ze de tafels van vermenigvuldiging hadden geleerd. De tafels werden geïntroduceerd aan het begin van het tweede leerjaar. Bovendien werden alle effecten zowel bij vermenigvuldiging als bij deling teruggevonden. Het interferentie-effect in de getalsmatchingtaak toont bovendien aan dat de deelnemende kinderen al van in het derde leerjaar een vermenigvuldigingsnetwerk hebben opgeslagen in hun langetermijngeheugen. Het is opmerkelijk dat deze effecten zo vroeg in het leerproces ontstaan. De lage foutpercentages bevestigen bovendien dat de kinderen deze kennis echt beheersen. Het vroege ontstaan van deze effecten toont aan dat een geheugennetwerk met dezelfde organisatie als bij volwassenen al vroeg vorm krijgt.

Hoe evolueren de effecten doorheen de ontwikkeling?

De sterke parallellen tussen beide operaties waren opvallend: zowel de grootte van de effecten als de evolutie ervan waren heel gelijklopend voor vermenigvuldiging en deling. Dit aantonen is noodzakelijk om de mogelijkheid uit te sluiten dat er onafhankelijke netwerken voor vermenigvuldiging en deling in ons geheugen bestaan. Toch waren er ook enkele verschillen tussen vermenigvuldiging en deling: het knoopeffect ontwikkelde anders voor deling en er werd geen evidentie gevonden voor automatische activatie van delingen bij de kinderen, terwijl er wel automatische activatie van vermenigvuldigingen werd geobserveerd. Dit duidt erop dat de kinderen al in het derde leerjaar een geheugennetwerk voor vermenigvuldigingen bezitten, waarin de verbindingen tussen problemen en hun oplossingen sterk genoeg zijn om interferentie te veroorzaken in een getalsmatchingtaak. De kinderen bezitten tevens een sterk geassocieerd netwerk van delingen en hun oplossingen, maar hier zijn de verbindingen (nog) niet sterk genoeg om automatisch te worden geactiveerd.

Conclusies en implicaties

Het vroege voorkomen van de standaard effecten heeft belangrijke implicaties, zowel in de klas als in een therapeutische setting. Zowel leerkrachten als professionele hulpverleners moeten zich bewust zijn van deze effecten wanneer zij evaluatieve toetsen of diagnostische tests gaan opstellen. Als de frequentie van kleine en grote problemen bijvoorbeeld niet werd gebalanceerd, zal dit leiden tot een onder- of overschatting van de rekenvaardigheden, meer bepaald van de feitenkennis van het bewuste kind. De sterke parallellen tussen vermenigvuldiging en deling die hier werden gerapporteerd, maar ook de sterke leereffecten tussen beide operaties die we bij volwassenen observeerden (De Brauwer, 2007), tonen dat vermenigvuldiging en deling *niet* als hiërarchisch geordende operaties moeten worden beschouwd.

Traditioneel worden de vier rekenkundige bewerkingen in een strikte volgorde aangeleerd: eerst optelling, dan aftrekking, vervolgens vermenigvuldiging en als laatste deling. Dit is echter op geen enkele pedagogische of psychologische theorie gebaseerd, al vloeit het waarschijnlijk voort uit het Piagetiaanse idee dat bepaalde numerieke vaardigheden eerst moeten beheerst worden vooraleer andere (misschien moeilijkere) vaardigheden verworven kunnen worden (Piaget, 1952). Op basis van onze bevindingen lijkt het correcter om vermenigvuldiging en deling als twee wederzijds afhankelijke en interagerende vaardigheden te beschouwen. Een eveneens wijdverbreide visie is dat vermenigvuldiging en deling gewoon twee andere operaties zijn die door kinderen moeten worden aangeleerd en dat er geen grote veranderingen nodig zijn in de redeneringen van kinderen om dit te kunnen. Er zijn inderdaad gelijkenissen tussen optellen en aftrekken enerzijds en vermenigvuldigen en delen anderzijds, maar er zijn ook heel wat verschillen. Vermenigvuldiging is niet zomaar herhaalde optelling en deling is niet zomaar herhaalde aftrekking. Een goed begrip houdt meer in. Bijvoorbeeld, een kind moet leren begrijpen dat er twaalf voeten zijn als er zes kinderen zijn ("one-to-many correspondence"). Een opmerkelijke observatie van Nunes en Bryant (1996) is dat vijf- tot zesjarigen hier al heel wat van begrijpen. Blöte, Lieffering en Ouwehand (2006) toonden aan dat zelfs vierjarigen dit al kunnen leren en problemen als 'Vier honden willen elk drie koekjes, hoeveel koekjes heb je nodig?' kunnen oplossen. Omwille van dit onderzoek werd er geargumenteerd dat het niet nodig is dat kinderen eerst optelling en aftrekking beheersen vooraleer ze leren vermenigvuldigen (Nunes & Bryant, 1996). De conceptuele kennis van vermenigvuldiging kan dus al vroeg verworven worden.

Het is tevens een feit dat kinderen al vroeg leren hoe ze (bv. speelgoed) moeten delen. Deze ervaringen vormen de basis voor hun begrip van het concept deling. Er valt natuurlijk meer te begrijpen aan deze operatie: kinderen moeten de relatie tussen de drie termen (deler, deeltal en quotiënt) inzien. Correa, Nunes en Bryant (1998) demonstreerden dat zesjarigen hier al een redelijk inzicht in hebben; ongeveer de helft van de kinderen uit deze studie begrepen de inverse relatie tussen deler en quotiënt. De basis voor de conceptuele kennis van deling is dus al vroeg aanwezig. Bovendien beschouwen kinderen deling niet per definitie als moeilijker dan vermenigvuldiging (Mulligan & Mitchelmore, 1997), wat tevens strookt met onze eigen observaties.

Gezien de focus van dit artikel op feitenkennis gaan we kort in op het belang dat hier al dan niet aan moet worden gehecht op school en/of in de therapie. Dit was (en is misschien nog altijd) een heet hangijzer onder leerkrachten en hulpverleners. Hoe wordt een robuuste geheugenrepresentatie van rekenfeiten het best bereikt? Door dril of door het aanleren van strategieën? In de onderzoeksliteratuur bestaan hier uiteenlopende visies over. Enerzijds wordt geargumenteerd dat verschillende leermethodes tot eenzelfde representatie leiden. Het maakt met andere woorden niet uit hoe je rekenfeiten aangeleerd krijgt (Logan & Klapp, 1991). Anderzijds zijn er auteurs die argumenteren dat de beste manier om tot een robuuste geheugenrepresentatie te komen, moet beginnen met het leren van strategieën en procedures (Delazer e.a., 2005). Wij besluiten op basis van de literatuur en onze eigen bevindingen dat de conceptuele kennis van vermenigvuldiging en deling al vroeg verworven kan worden en dat het aanleren van procedurele kennis van *beide* operaties in combinatie met voldoende oefening en herhaling, de beste manier is om tot een goede geheugenrepresentatie van vermenigvuldigings- en delingsfeiten te komen. Het bezitten van deze geautomatiseerde feitenkennis is ontegensprekelijk een voordeel in de verdere ontwikkeling van rekenvaardigheden.

Dankwoord

Het gerapporteerde onderzoek werd gefinancierd door een GOA-beurs van de Universiteit Gent. Wij danken de leerkrachten en leerlingen van de Vrije Basisschool De Parel in Heusden (Oost-Vlaanderen) voor hun medewerking aan deze studie.

Referenties

Blöte, A.W., Lieffering, L.M., & Ouwehand, K. (2006). The development of many-to-one counting in 4-yr-old children. *Cognitive Development, 21,* 332-348.

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain.* London: MacMillan.

Campbell, J.I.D. (1995). Mechanisms of simple addition and multiplication: A modified network-interference theory and simulation. *Mathematical Cognition, 1,* 121-164.

Campbell, J.I.D. (2005). *Handbook of mathematical cognition.* New York: Psychology Press.

Campbell, J.I D., & Graham, D.J. (1985). Mental multiplication skill: Structure, process, and acquisition. *Canadian Journal of Psychology, 39,* 338-366.

Campbell, J.I.D., & Gunter, R. (2002). Calculation, culture, and the repeated operand effect. *Cognition, 86,* 71-96.

Campbell, J.I.D., & Timm, J.C. (2000). Adults' strategy choices for simple addition: Effects of retrieval interference. *Psychonomic Bulletin & Review, 7,* 692-699.

Campbell, J.I.D., & Xue, Q. (2001). Cognitive arithmetic across cultures. *Journal of Experimental Psychology: General, 130,* 299-315.

Cipolotti, L., & deLacy Costello, A. (1995). Selective impairment for simple division. *Cortex, 31,* 433-449.

Cooney, J.B., Swanson, H.L., & Ladd, S.F. (1988). Acquisition of mental multiplication skill: Evidence for the transition between counting and retrieval strategies. *Cognition & Instruction, 5,* 323-345.

Correa, J., Nunes, T., & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology, 90,* 321-329.

De Brauwer, J. (2007). *The representations of arithmetic fact knowledge in memory and their development.* Ongepubliceerde doctoraatsverhandeling, Universiteit Gent.

De Brauwer, J., & Fias, W. (2009). A longitudinal study of children's performance on simple multiplication and division problems. *Developmental Psychology, 45,* 1480-1496.

De Brauwer, J., Verguts, T., & Fias, W. (2006). The representation of multiplication facts: Developmental changes in the problem-size, five, and tie effects. *Journal of Experimental Child Psychology, 94,* 43-56.

Dehaene, S. (1997). *The number sense*. New York/Cambridge (UK):Oxford University Press/ Penguin Press.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex, 33,* 219-250.

Delazer, M., & Benke, T. (1997). Arithmetic facts without meaning. *Cortex, 33,* 697-710.

Delazer, M., Domahs, F., Lochy, A., Karner, E., Benke, T., & Poewe, W. (2004). Number processing and basal ganglia dysfunction: A single case study. *Neuropsychologia, 42,* 1050-1062.

Delazer, M., Girelli, L., Granà, A., & Domahs, F. (2003). Number processing and calculation: Normative data from healthy adults. *The Clinical Neuropsychologist, 17,* 331-350.

Delazer, M., Ischebeck, A., Domahs, F., Zamarian, L., Koppelstaetter, F., Siedentopf, C.M., Kaufman, L., Benke, T., & Felber, S. (2005). Learning by strategies and learning by drill: Evidence from an fMRI study. *NeuroImage, 25,* 838-849.

Delazer, M., Karner, E., Zamarian, L., Donnemiller, E., & Benke, T. (2005). Number processing in posterior cortical atrophy: A neuropsychological case study. *Neuropsychologia, 44,* 36-51.

Delazer, M., Semenza, C., & Denes, G. (1994). Reading Arabic numbers and number words in a dyslexic patient. *Brain & Language, 47,* 437-439.

Desoete, A., Roeyers, H., & De Clercq, A. (2005). Children with mathematics learning disabilities in Belgium. *Journal of Learning Disabilities, 37,* 50-61.

Domahs, F., & Delazer, M. (2005). Some assumptions and facts about arithmetic facts. *Psychology Science, 47,* 96-111.

Galfano, G., Rusconi, E., & Umiltà, C. (2003). Automatic activation of multiplication facts: Evidence from the nodes adjacent to the product. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 56A,* 31-61.

Geary, D.C., Hamson, C.O., & Hoard, M.K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of Experimental Child Psychology, 77,* 236-263.

Jordan, N.C., Hanich, L.B., & Kaplan, D. (2003). Arithmetic fact mastery in young children: A longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology, 85,* 103-119.

Kaufmann, L., Lochy, A., Drexler, A., & Semenza, C. (2004). Deficient arithmetic fact retrieval: Storage or access problem? *Neuropsychologia, 42,* 482-496.

Kirk, E.P., & Ashcraft, M.H. (2001). Telling stories: The perils and promise of using verbal reports to study math strategies. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition, 27*, 157-175.

Koshmider, J.W., & Ashcraft, M.H. (1991). The development of children's mental multiplication skills. *Journal of Experimental Child Psychology, 51,* 53-89.

LeFèvre, J.-A., Bisanz, J., & Mrkonjic, L. (1988). Cognitive arithmetic: Evidence for obligatory activation of arithmetic facts. *Memory & Cognition, 16,* 45-53

LeFèvre, J.-A., & Morris, J. (1999). More on the relation between division and multiplication in simple arithmetic: Evidence for mediation of division solutions via multiplication. *Memory & Cognition, 27,* 803-812.

Lemaire, P., & Siegler, R.S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General, 124,* 83-97.

Lochy, A., Domahs, F., & Delazer, M. (2004). A case-study of access deficit to stored multiplication facts: Discrepancy between explicit and implicit tasks. *Cortex, 40,* 153-154.

Logan, G.D., & Klapp, S.T. (1991). Automatizing alphabet arithmetic: I. Is extended practice necessary to produce automaticity. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition, 17,* 179-195.

McNeil, J.E., & Burgess, P.W. (2002). The selective impairment of arithmetical procedures. *Cortex, 38,* 569-587.

Mulligan, J.T., & Mitchelmore, M.C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28,* 309-330.

Mussolin, C., & Noël, M.-P. (2008). Specific retrieval deficit from long-term memory in children with poor arithmetic facts abilities. *The Open Psychology Journal, 1,* 26-34.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics.* Oxford, UK: Blackwell Publishers.

Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence in children.* New York: International Universities Press.

Robinson, K.M., Arbuthnott, K.D, Rose, D., McCarron, M.C., Globa, C.A., & Phonexay, S.D. (2006). Stability and change in children's division strategies. *Journal of Experimental Child Psychology, 93,* 224-238.

Sandrini, M., Miozzo, A., Cotelli, M., & Cappa, S.F. (2003). The residual calculation abilities of a patient with severe aphasia: Evidence for a selective deficit of subtraction procedures. *Cortex, 39,* 85-96.

Siegler, R.S. (1988). Strategy choice procedures and the development of multiplication skill. *Journal of Experimental Psychology: General, 117,* 258-275.

Sokol, S.M., McCloskey, M., Cohen, N.J., & Aliminosa, D. (1991). Cognitive representations and processes in arithmetic: Inferences from the performance of brain-damaged subjects. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition, 17,* 355-376.

Stazyk, E.H., Ashcraft, M.H., & Hamann, M.S. (1982). A network approach to simple mental multiplication. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition, 8,* 320-335.

Thibodeau, M.H., LeFèvre, J.-A., & Bisanz, J. (1996). The extension of the interference effect to multiplication. *Canadian Journal of Experimental Psychology, 50,* 393-396.

Verguts, T., & Fias, W. (2005). Interacting neighbors: A connectionist model of retrieval in single-digit multiplication. *Memory & Cognition, 33*, 1-16.

Whetstone, T. (1998). The representation of arithmetic facts in memory: Results from retraining a brain-damaged patient. *Brain & Cognition, 36,* 290-309.

Zamarian, L., Karner, E., Benke, T., Donnemiller, E., & Delazer, M. (2006). Knowing 7×8, but not the meaning of 'elephant': Evidence for the dissociation between numerical and non-numerical semantic knowledge. *Neuropsychologia, 44*, 1708-1723.